

ARTYKUŁY

*Aleksander Jakimowicz**

KATASTROFY I CHAOS W WYJAŚNIANIU ZŁOŻONOŚCI PROCESÓW GOSPODARCZYCH

1. PODSTAWY TEORII KATASTROF

1.1. TWIERDZENIE KLASYFIKACYJNE

Teoria katastrof, zwana także teorią morfogenezy, pojawiła się w nauce w połowie lat 70. ubiegłego wieku (Thom, 1975). Jest to ogólna metoda modelowania systemów kładąca nacisk na sposób, w jaki nieciągłe efekty mogą powstawać z ciągłych przyczyn. Początkowo wykorzystywano ją do opisu rozwoju form biologicznych, jednak z czasem, na skutek dyfuzji interdyscyplinarnej, znalazła zastosowanie w innych naukach (*Structural Stability...*, 1976; Poston, Stewart, 1996; Rosser, 1992). Teoria katastrof jest oparta na topologii, dlatego nawiązuje do geometrycznej intuicji badacza. Opisuje ona ewolucję systemu dynamicznego jako proces ciągłych zmian, które co pewien czas są przerywane nagłymi zmianami jakościowymi. Stąd wynika użyteczność tej metody do modelowania zmian strukturalnych obiektów. Katastrofa elementarna oznacza tylko nagłe przejście do nowego stanu i nie musi wiązać się z jakimkolwiek pogorszeniem dowolnej charakterystyki obiektu w porównaniu ze stanem poprzednim. Przykładami katastrof mogą być następujące zjawiska: zagotowanie się wody w czajniku, boom na rynku papierów wartościowych, powstanie lub likwidacja przedsiębiorstwa.

Niech system dynamiczny będzie reprezentowany przez gładką funkcję:

$$f : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad (1)$$

* Instytut Nauk Ekonomicznych PAN.

gdzie: \mathbf{R}^k to przestrzeń kontrolna reprezentująca zbiór przyczyn, natomiast \mathbf{R}^n jest przestrzenią stanów (zachowań) reprezentującą zbiór skutków. Funkcję f nazywa się funkcją potencjalną. Jeśli wewnętrzna dynamika systemu polega na dążeniu do lokalnego maksimum, to funkcja potencjalna może reprezentować prawdopodobieństwo jego znalezienia. W innym przypadku, gdy system poszukuje lokalnego minimum, funkcja potencjalna może reprezentować energię lub koszt.

Podstawą teorii katastrof jest twierdzenie klasyfikacyjne. W celu jego sformułowania przyjmijmy, że $M_f \subset \mathbf{R}^{k+n}$ jest zbiorem punktów spełniających warunki:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \text{grad}_x f = 0, \quad (2)$$

gdzie: $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ oraz $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Ogólnie biorąc, oznacza to, że M_f jest n -rozmaitością, ponieważ zadana jest przez k równań i jest kowymiaru k . Odwzorowanie postaci $\chi_f: M_f^k \rightarrow \mathbf{R}^k$, indukowane przez projekcję $\mathbf{R}^{k+n} \rightarrow \mathbf{R}^k$, nazywamy odwzorowaniem katastroficznym przekształcenia f . Niech F oznacza przestrzeń funkcji klasy C^∞ określonych na \mathbf{R}^{k+n} z topologią C^∞ Whitneya (1943, 1944, 1955).

Twierdzenie klasyfikacyjne (Trotman, Zeeman, 1988). Jeśli $k \leq 5$, to istnieje taki zbiór generyczny $F^* \subset F$ (otwarty i gęsty w F), że jeśli $f \in F^*$, to:

- 1) M_f jest rozmaitością wymiaru k .
- 2) Każda osobliwość funkcji χ_f jest równoważna z jednym typem osobliwości należącym do skończonej rodziny typów, które nazywamy katastrofami elementarnymi.
- 3) Odwzorowanie χ_f jest lokalnie stabilne we wszystkich punktach rozmaitości M_f ze względu na małe zakłócenia przekształcenia f .

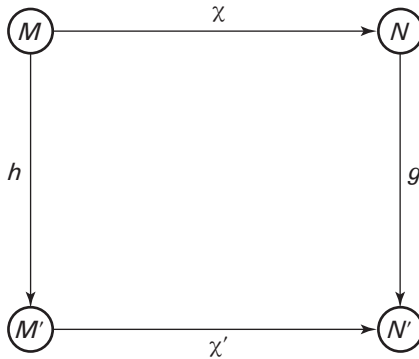
Liczba elementarnych katastrof zależy tylko i wyłącznie od kowymiaru k w sposób przedstawiony w tabeli 1.

Tabela 1. Klasyfikacja katastrof elementarnych w zależności od kowymiaru k

Wartość kowymiaru (k)	1	2	3	4	5	6	7...
Liczba katastrof elementarnych	1	2	5	7	11	∞	∞

Ważny jest tutaj sposób rozumienia równoważności. Dwa odwzorowania $\chi: M \rightarrow N$ i $\chi': M' \rightarrow N'$ są nazywane równoważnymi, jeśli istnieją takie dyfeomorfizmy h i g , że diagram przedstawiony na rysunku 1 jest przemienny.

Żałujemy, że następujące odwzorowania χ i χ' mają osobliwości odpowiednio w punktach $x \in M$ i $x' \in M'$. Osobliwości te są równoważne wtedy, gdy powyższa

Rysunek 1. Odwzorowania i dyfeomorfizmy

Źródło: na podstawie Zeeman (1975).

definicja obowiązuje lokalnie i $h\chi = \chi'$. Stabilność oznacza, że χ_f jest równoważne χ_r dla wszystkich r w otoczeniu f w F (Zeeman, 1975).

Powyższe twierdzenie klasyfikuje typy osobliwości, jakie może mieć większość odwzorowań χ_f . Dla $k > 5$ klasyfikacja jest nieskończona. Z punktu widzenia zastosowań ważny jest przypadek $k = 4$. Wtedy \mathbf{R}^4 można interpretować jako fizyczną czasoprzestrzeń, w której zachodzą wszystkie zdarzenia. Odwzorowanie χ_f posiada wtedy siedem typów osobliwości, które nazywają się następująco: zagięcie, wierzchołek, jaskółczy ogon, motyl, pępek hiperboliczny, pępek eliptyczny i pępek paraboliczny (Jakimowicz, 2005). Wydaje się, że taką interpretację rzeczywistości potwierdza samo życie.

Wiele badań zdaje się wskazywać, że twierdzenie klasyfikacyjne ma swój odpowiednik w antropologii kulturowej. Otóż wszystkie ludzkie historie, niezależnie od ogromnej ich liczby i niemal nieskończonego bogactwa szczegółów, można sprowadzić do siedmiu podstawowych archetypów kulturowych (Booker, 2010). Przedmiotem badań archeologii kulturowej były najrozmaitsze opowieści, od starożytnych mitów poczynawszy na współczesnych historiach biznesowych skończywszy. Siódemka podstawowych wątków opowieści jest następująca:

- 1) Pokonanie potwora. Główna postać musi stoczyć śmiertelną walkę z przerażającym, potężnym i groźnym monstrem (rzeczywistym lub wymaginywanym).
- 2) Od ubóstwa do bogactwa (lub od przeciętności do sławy). Najlepszym przykładem jest tu historia brzydkiego kaczątka.
- 3) Poszukiwanie. Bohater identyfikuje swój główny cel i rusza w niebezpieczną wyprawę, aby go osiągnąć.
- 4) Podróż i powrót. Bohater opuszcza znany sobie świat, aby dotrzeć do zupełnie innego. Później, po niebezpiecznych przygodach zakończonych dramatyczną ucieczką, następuje powrót do punktu wyjścia.

- 5) Komedia. Po całej masie nieporozumień główne postacie nawiązują więź, która pozwala uporządkować zdarzenia i doprowadzić wszystko do szczęśliwego zakończenia.
- 6) Tragedia. Wada głównego bohatera lub niezrozumienie przez niego własnego ja jest przyczyną szeregu zdarzeń prowadzących do katastrofy.
- 7) Odrodzenie. Ciemna siła trzyma bohatera w śmiertelnym uścisku. Po pozornym tryumfie tej siły przychodzi zmiana. Dzielnny mąż zostaje odkupiony, najczęściej przez życiodajną siłę miłości.

Trudno orzec, czy te archetypy są wynikiem psychologicznych struktur ludzkiego rozumienia świata, czy tylko pochodną tradycji. Teoria katastrof sugeruje, że są częścią obiektywnej rzeczywistości.

Zastosowanie teorii katastrof w ekonomii możliwe jest jedynie wtedy, gdy prawo rządzące danym zjawiskiem lub procesem zostało dobrze określone. W takim przypadku teoria katastrof ułatwi dobór najprostszej struktury matematycznej, która będzie generowała zachowania zbliżone do rzeczywistych. Równie ważną sprawą jest też właściwe korzystanie z metafor. Z epistemologicznego punktu widzenia budowanie nieliniowego modelu zjawisk ekonomicznych na podstawie dyfuzji interdyscyplinarnej powinno być poprzedzone rozważeniem pewnych idei nauk przyrodniczych jako źródeł analogii, a następnie – jeśli tylko jest to możliwe – poddanie ich matematyzacji (Jakimowicz, 2010a).

1.2. KATASTROFA WIERZCHOŁKOWA (*CUSP*)

Jedną z najczęściej spotykanych w zastosowaniach ekonomicznych katastrof elementarnych jest katastrofa wierzchołkowa. Funkcja potencjalna ma wtedy postać:

$$f: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}, \quad (3)$$

zatem przestrzeń kontrolna jest dwuwymiarowa, natomiast przestrzeń stanu jest jednowymiarowa. Funkcja (1) posiada prostą reprezentację wielomianową:

$$f(c_1, c_2, x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x, \quad (4)$$

gdzie x oznacza zmienną stanu, natomiast c_1 i c_2 to parametry kontrolne (Zeeman, 1977). Rozmaitość katastrofy określająca powierzchnię równowagi systemu jest dana zależnością:

$$M_3 = \left[(c_1, c_2, x): \frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dx} = x^3 + c_1x + c_2 \right]. \quad (5)$$

Zbiór osobliwości, którego przekroczenie powoduje nieciągłą zmianę trajektorii, jest wyznaczony następująco:

$$S_3 = \left[(c_1, c_2, x): \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \frac{d^2f}{dx^2} = 3x^2 + c_1 = 0 \right]. \quad (6)$$

Rzut zbioru osobliwości w przestrzeń parametrów tworzy zbiór bifurkacyjny:

$$B_3 = \left[(c_1, c_2): 4c_1^3 + 27c_2^2 = 0 \right]. \quad (7)$$

Katastrofa wierzchołkowa była pierwszą formą nieliniowej, topologicznej złożoności, którą zaczęto poważnie studiować w ekonomii. Już pierwsze jej zastosowania wskazywały na możliwości głębszego zrozumienia życia gospodarczego w porównaniu z ekonomią tradycyjną. Umożliwiła ekonomistom urealnienie badań i była pierwszym krokiem wyjścia poza tradycyjną analizę stabilnych stanów równowagi, narzuconą przez modele liniowe. Jednym z najciekawszych przykładów jest morfogenetyczny model rynku kapitałowego (Zeeman, 1974). Występują tam dwa rodzaje graczy, fundamentaliści i czartyści (wykresowcy – osoby stosujące analizę techniczną), którzy z definicji posługują się odmiennymi strategiami inwestycyjnymi. Było to sprzeczne z niepodzielnie panującą w ekonomii lat 70. hipotezą racjonalnych oczekiwań. Model Zeemana stanowił znaczne odejście od obrazu racjonalnych agentów, dlatego stał się przedmiotem surowej krytyki. Dzisiaj heterogeniczność oczekiwań podmiotów gospodarczych nikogo nie dziwi, jest zasadniczą cechą wielu dynamicznych modeli rynków i gospodarek, a katastrofy wraz z chaosem deterministycznym stały się podstawą szybko rozwijającego się nurtu badań zwanego ekonomią złożoności (Beinhocker, 2006).

2. CHAOS DETERMINISTYCZNY

2.1. NIELINIOWOŚĆ JAKO WARUNEK KONIECZNY ZŁOŻONOŚCI

Przez niemal cały XX wiek w ekonomii głównego nurtu obowiązywało założenie o liniowości systemów gospodarczych. Modele matematyczne implikowały istnienie stanów równowagi, a rola badacza ograniczała się do wykazania warunków ich stabilności. Pochodną tego sposobu myślenia była hipoteza racjonalnych oczekiwań. Uporczywie pojawiające się w ostatnich latach kryzysy wykazały, że teoria ekonomii pozostała daleko w tyle za rzeczywistością. Spowodowało to zainteresowanie teoretyków ekonomii modelami nieliniowymi jako lepszymi przybliżeniami realnego świata niż modele liniowe. Taka zmiana orientacji wymaga wprowadzenia stosownej metodologii i podjęcia studiów interdyscyplinarnych. Problem z modelami nieliniowymi polega na tym, że bardzo rzadko dają one eleganckie rozwiązania analityczne. Wynika stąd konieczność zastosowania na szerszą skalę dynamicznej nieliniowej teorii systemów oraz badań numerycznych.

We wszystkich systemach liniowych obowiązuje zasada superpozycji. Zgodnie z nią, reakcja systemu na dwa lub większą ilość bodźców jest sumą reakcji wywołanych indywidualnie przez każdy z tych bodźców. Jeśli czynnik A wywołuje reak-

cję X , a czynnik B reakcją Y , to czynnik $(A + B)$ da wynik $(X + Y)$. Innymi słowy systemy liniowe są addytywne. Zasada superpozycji implikuje liniowość układu, gdy uzupełnimy ją o warunek homogeniczności.

Niech system dynamiczny F będzie zdefiniowany następująco:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad (8)$$

gdzie \mathbf{x} oznacza bodziec, a \mathbf{y} reakcję na ten bodziec. Układ F jest liniowy, gdy spełnione są dwa poniższe warunki.

$$1. \text{ Warunek addytywności: } F(x_1 + x_2 + \dots) = F(x_1) + F(x_2) + \dots \quad (9)$$

$$2. \text{ Warunek homogeniczności: } F(a\mathbf{x}) = aF(\mathbf{x}), \text{ gdzie } a \text{ jest skalarem.} \quad (10)$$

Często warunki addytywności i homogeniczności łączy się w jeden warunek i wtedy zasada superpozycji ma postać:

$$F(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots) = a_1F(x_1) + a_2F(x_2) + \dots \quad (11)$$

Wynika stąd, że w systemach liniowych nie są możliwe nieliniowe operacje na zmiennych układu (jako przykłady można wymienić mnożenie lub potęgowanie zmiennych), ponadto parametry strukturalne nie mogą zależeć od zmiennych. Jeśli warunki (9)–(10) nie są spełnione, to F jest systemem nieliniowym.

Do głównych przyczyn nieliniowości w ekonomii zaliczamy:

- Ograniczenia narzucone na zmienne ekonomiczne. Jednym z przykładów są pułapy wahań koniunkturalnych, tzw. nieliniowości typu Hicksa (1951).
- Techniczno-bilansowe prawa produkcji (Lange, 1975).
- Czynniki techniczno-organizacyjne (Kalecki, 1984b).
- Ograniczona racjonalność (Sargent, 1993).
- Procesy kształtowania się (heterogeniczność) oczekiwań (Hommes, 2006).
- Adaptacyjne procesy nauki podmiotów gospodarczych (Hommes, 2005).
- Kształt (wypukłość) krzywych obojętności.
- Procesy agregacji niektórych zmiennych (Varian, 1995).
- Ewoluuujące reguły konkurencji (Hommes, 2005).
- Prawa psychologiczne (Keynes, 1985).

Nieliniowość jest warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym wystąpienia chaosu. Testy statystyczne potwierdzają, że nieliniowość jest zjawiskiem powszechnym w ekonomicznych szeregach czasowych, a część z nich dowodzi nawet istnienia chaosu deterministycznego (Jakimowicz, 2010b). Istnieją mocne przesłanki do twierdzenia, że w przyszłości rola nieliniowości w badaniach ekonomicznych będzie rosła.

2.2. EFEKT MOTYLA

Chaos deterministyczny oznacza pozornie przypadkowe zachowanie się układu deterministycznego, a więc takiego, który podlega ściśle określonym prawom. Zjawisko to zostało odkryte już w roku 1890 przez francuskiego uczonego Henri Poincarégo w trakcie badań nad ograniczonym problemem trzech ciał (Poincaré, 1952). Wniosek wypływający z badań był, jak na tamte czasy, szokujący. Okazało się, że Układ Słoneczny nie jest systemem stabilnym. Odkrycie to poszło w zapomnienie na ponad siedemdziesiąt lat. Dopiero w roku 1963 meteorolog Edward N. Lorenz w trakcie badań prostego nieliniowego modelu atmosfery ziemskiej ponownie odkrył złożoność w układzie deterministycznym (Lorenz, 1963). Trzy odkrycia, zjawisko chaosu, twierdzenia Gödla o niezupełności i zasadę nieoznaczoności Heisenberga, zalicza się do największych osiągnięć nauki w XX wieku (Hawking, 2002).

Powodem stochastycznego zachowania się niektórych nieliniowych systemów deterministycznych jest ich niezwykła wrażliwość na warunki początkowe, która została nazwana przez Lorenza efektem motyla. Drobne zaburzenie warunków początkowych po określonym czasie powoduje duże zmiany w zachowaniu się układu, trajektorie zaczynają rozbiegać się wykładniczo. Jak barwnie opisuje to odkrywca, przysłowiowe machnięcie skrzydełkami przez motyla w Brazylii może stać się przyczyną tornada w Teksasie (Lorenz, 1995).

Odkrycie wrażliwości nieliniowych systemów dynamicznych na warunki początkowe miało – jak większość odkryć naukowych – charakter przypadkowy. Pewnego dnia w styczniu 1961 r. Lorenz postanowił powtórzyć badania numeryczne, ale – z powodu niewielkiej mocy obliczeniowej ówczesnych komputerów – zdecydował się na skrócenie czasu obliczeń. Podstawił wartości pośrednie pewnych zmiennych jako nowe warunki początkowe. Trajektorie wykreślone jako funkcje czasu początkowo pokrywały się, ale później zaczęły się rozchodzić. Powodem okazało się zaokrąglenie wartości zmiennej z sześciu do trzech miejsc po przecinku. Wniosek był taki, że długookresowe prognozy pogody są niemożliwe.

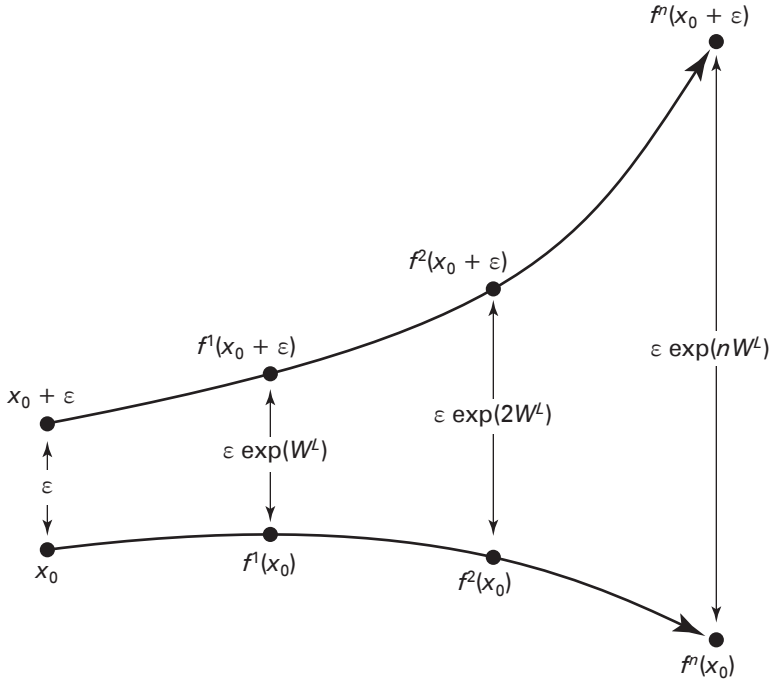
Do najczęściej stosowanych ilościowych miar rozbieżności trajektorii należą wykładniki Lapunowa. Pojęcie to zostało wykorzystane przez Oseledeca w znanym multiplikatywnym twierdzeniu ergodycznym (Oseledec, 1968). Ten wynik szybko stał się podstawą dynamiki nieliniowej i zapoczątkował lawinę badań naukowych. W celu zdefiniowania wykładnika Lapunowa rozważmy system dynamiczny opisany jednowymiarowym odwzorowaniem o postaci:

$$x_{n+1} = f(x_n), x \in [0, 1]. \quad (12)$$

Generowanie chaosu przez ten system oznacza, że odległość między dwoma trajektoriami rozpoczynającymi się w nieznacznie różniących się punktach startu x_0 i $x_0 + \varepsilon$ powiększy się wykładniczo, osiągając po n iteracjach wartość:

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| = \varepsilon \exp(nW^L). \quad (13)$$

Rysunek 2. Definicja wykładnika Lapunowa



Źródło: opracowanie własne.

Z zależności (13) otrzymujemy:

$$W^L = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right|. \quad (14)$$

Wykładnik Lapunowa jest granicą wyrażenia (14) dla $\varepsilon \rightarrow 0$ i $n \rightarrow \infty$. Oznacza to pojawienie się pochodnej funkcji $f^n(x)$ w otoczeniu punktu x_0 :

$$W^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (15)$$

Jeśli wykorzystamy regułę łańcuchową różniczkowania funkcji złożonej, to zależność (15) można przedstawić w postaci wzoru zawierającego tylko pochodne pierwszego rzędu:

$$W^L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (16)$$

Na rysunku 2 przedstawiono definicję wykładnika Lapunowa dla systemu (12). Symbolami f^1, f^2, \dots, f^n oznaczono kolejne iteracje. Po każdej z nich dystans między trajektoriami zwiększa się wykładniczo. Definicję tę można także uogól-

nić na układy wielowymiarowe. Wtedy liczba wykładników musi odpowiadać liczbie wymiarów. Jeśli największy wykładnik układu dynamicznego jest dodatni, to mamy do czynienia z trajektorią chaotyczną, wykładnik równy zero oznacza punkt bifurkacji, a jego wartość ujemna wiąże się ze zbieżnością trajektorii do przyciągającego punktu stałego lub atraktora periodycznego.

Podstawowym pojęciem nieliniowej dynamicznej teorii systemów jest pojęcie atraktora, a w szczególności atraktora chaotycznego. Niech F oznacza odwzorowanie m -wymiarowej przestrzeni w siebie. Zbiór A znajdujący się w przestrzeni m -wymiarowej nazywamy atraktorem odwzorowania F , jeśli spełnione są trzy warunki:

1. Niezmienniczość: $F(A) = A$.
2. Gęstość: A zawiera punkt początkowy, którego trajektoria przebiega przez zbiór A (mówimy wtedy, że trajektoria jest gęsta w A).
3. Stabilność i przyciąganie: trajektorie rozpoczynające wędrówkę z punktów znajdujących się w otoczeniu A wraz z upływem czasu utrzymują się w pobliżu tego zbioru i dążą do niego asymptotycznie.

Atraktor nazywamy chaotycznym, jeśli zawiera trajektorię, która ma co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa. Często na określenie takiego atraktora używa się też pojęcia „dziwny atraktor”. Dziwność i chaos są traktowane przeważnie jako synonimy, jednak niekiedy zakresy tych pojęć się nie pokrywają (Jakimowicz, 2010b, s. 281).

3. WZORCOWE ZASTOSOWANIA

3.1. TEORIA TRANSFORMACJI SYSTEMOWEJ

3.1.1. OBECNY STAN WIEDZY O MAKROEKONOMICZNYCH KOSZTACH ZŁOŻONOŚCI PROCESÓW PRZEJŚCIA OD SOCJALIZMU DO KAPITALIZMU

Jednym z największych wyzwań stojących obecnie przed ekonomią jest przekształcenie gospodarek centralnie planowanych w gospodarki rynkowe. Procesy transformacji powinny być racjonalne, przez co należy rozumieć redukcję kosztów społecznych przemian do niezbędnego minimum. Reformy zapoczątkowane w roku 1989 wciąż trwają, jednakże już teraz można podjąć próbę sformułowania teorii transformacji systemowej. Zadanie to jest dość trudne z wielu powodów: zróżnicowanego stopnia zaawansowania reform w różnych krajach postsocjalistycznych, wielkości przekształcanych gospodarek i różnic w ich relacjach z zagranicą, a także występowania specyficznych dla danego kraju czynników społecznych, kulturowych, geograficznych i innych. Podstawowym założeniem, jakie należy tu przyjąć, jest istnienie wspólnych, ogólnych zasad obowiązujących w każ-

dym przypadku, niezależnie od stopnia zróżnicowania poszczególnych gospodarek. Tylko wtedy może istnieć ogólna teoria przemian systemowych¹.

Ekonomia głównego nurtu nie uwzględnia wzrostu złożoności gospodarki spowodowanego rozpoczęciem i kontynuowaniem procesów transformacji, stąd pomija ona ważną pozycję kosztów reform, którą nazwałem makroekonomicznymi kosztami złożoności (Jakimowicz, 2012a). Do oceny stanu początkowego badanego obiektu, którym jest klasyczna gospodarka socjalistyczna, i jego stanów w trakcie kolejnych przekształceń używa się modeli liniowych. Poziom złożoności modeli liniowych opisujących zarówno gospodarkę centralnie planowaną, jak i gospodarkę transformowaną jest podobny, co wyjaśnia przyczyny pominięcia przez teorię ekonomii skutków wzrostu złożoności wywołanego procesami reform. Co prawda intuicyjne rozumienie kategorii kosztów złożoności znane jest w teorii przedsiębiorstwa (Noga, 2009), jednak w makroekonomii zjawisko to jest nadal słabo poznane. Dopiero globalny kryzys finansowy spowodował, że na złożoność procesów gospodarczych i związane z nią problemy spojrzano nieco szerzej (Bogle, 2009). Koszty złożoności to nowa, jakościowa pozycja w bilansie transformacji. Przyszłe badania należy skupić na metodach jej pomiaru. Stanowi ona także olbrzymie wyzwanie dla polityki gospodarczej, która już dziś powinna dążyć do upraszczania życia gospodarczego. W dalszej części artykułu rozważam model przydatny do opisu przyczyn powstawania kosztów złożoności w transformowanych gospodarkach.

3.1.2. NIELINIOWA TEORIA TRANSFORMACJI SYSTEMOWEJ

Pierwszy krok w kierunku uchwycenia i opisu zmian złożoności gospodarczej, będących wynikiem procesu transformacji, zrobili badacze amerykańscy, którzy sformułowali model chaotycznej histerezy (Rosser, Rosser, 1998; Rosser i in., 2001). Mamy tu jednocześnie zastosowanie dwóch podstawowych metod nieliniowej dynamicznej teorii systemów: katastrof elementarnych i chaosu deterministycznego. Punktem wyjścia jest gospodarka socjalistyczna. Zgodnie z konwencją marksowską gospodarka została podzielona na dwa sektory: sektor dóbr konsumpcyjnych i sektor dóbr inwestycyjnych. Do opisu kryzysów społeczno-gospodarczych zastosowano pojęcie luki technologicznej i katastrofę wierzchołkową (*cusp*). Chaotyczna histereza pojawiająca się w reformowanej gospodarce jest wynikiem działania dwufazowego nieliniowego akceleratora. Autorzy korzystają ze znanej w literaturze przedmiotu nieliniowej wersji modelu mnożnika-akceleratora (Puu, 1992).

System gospodarczy opisany jest następującymi równaniami:

$$I_t = I_t^C + I_t^K, \quad (17)$$

¹ Należy rozważyć również możliwość, że sformułowanie jednolitej ogólnej teorii transformacji nie będzie możliwe. Niektóre badania wskazują, że transformacja w Europie Środkowej i Wschodniej oraz w Chinach przebiegała zupełnie inaczej. W pierwszym przypadku polegała ona na odgórnym wprowadzeniu instytucjonalnych ram gospodarki rynkowej, natomiast w drugim postawiono głównie na samoorganizację i wykorzystanie istniejącego już wcześniej potencjału gospodarczego (Chen, 1993).

$$I_t^C = (1 - v)I_{t-1}, \quad (18)$$

$$I_t^K = u(I_{t-1} - I_{t-2}) - u(I_{t-1} - I_{t-2})^3, \quad (19)$$

gdzie:

I – inwestycje całkowite,

I_t^C – inwestycje w sektorze produkującym dobra konsumpcyjne,

I_t^K – inwestycje w sektorze produkującym dobra kapitałowe,

u – współczynnik akceleracji w sektorze dóbr kapitałowych,

v – współczynnik akceleracji w sektorze dóbr konsumpcyjnych.

Po wprowadzeniu nowej zmiennej oznaczającej przyrost inwestycji całkowitych

$$Z_t = I_t - I_{t-1} \quad (20)$$

model (17)–(19) redukuje się do odwzorowania dwuwymiarowego o postaci:

$$I_t = I_{t-1} + Z_t, \quad (21)$$

$$Z_t = u(Z_{t-1} - Z_{t-1}^3) - vI_{t-1}. \quad (22)$$

Układu równań (21)–(22) nie można rozwiązać analitycznie, ale może on być przedmiotem badań numerycznych.

Następnym elementem teorii jest luka technologiczna, która wynika z wyższego współczynnika kapitałochłonności w socjalizmie w porównaniu z gospodarką kapitalistyczną. Paradoksalnie, zjawisko to jest wynikiem realizacji postulatów stabilności produkcji i pełnego zatrudnienia, które uczynić miały socjalizm systemem znośniejszym dla ludzi niż kapitalizm z jego chronicznym bezrobociem i kryzysami. Luka technologiczna została zdefiniowana w sposób następujący:

$$G(T) = \int_{t=0}^T \Phi[D(t)]dt = \frac{Y_m(t)}{K_m(t)} - \frac{Y_s(t)}{K_s(t)}, \quad (23)$$

przy warunku:

$$\frac{\partial \Phi[D(t)]}{\partial D(t)} > 0, \quad (24)$$

gdzie:

D – odsetek całkowitej produkcji będący pod kontrolą centralnego planisty,

Y – produkcja,

K – zasób kapitału,

a indeksy m i s definiują odpowiednio gospodarkę rynkową i gospodarkę socjalistyczną.

Kolejnym krokiem jest wprowadzenie katastrofy wierzchołkowej, której powierzchnia równowagi spełnia warunek (5). W rozpatrywanej teorii zmienną stanu jest prawdopodobieństwo wprowadzenia reform rynkowych $x = P(m)$, parametr bifurkacyjny to rozmiary luki technologicznej $c_1 = G$, natomiast parametrem asymetrycznym jest tempo wzrostu inwestycji $c_2 = Z/I$.

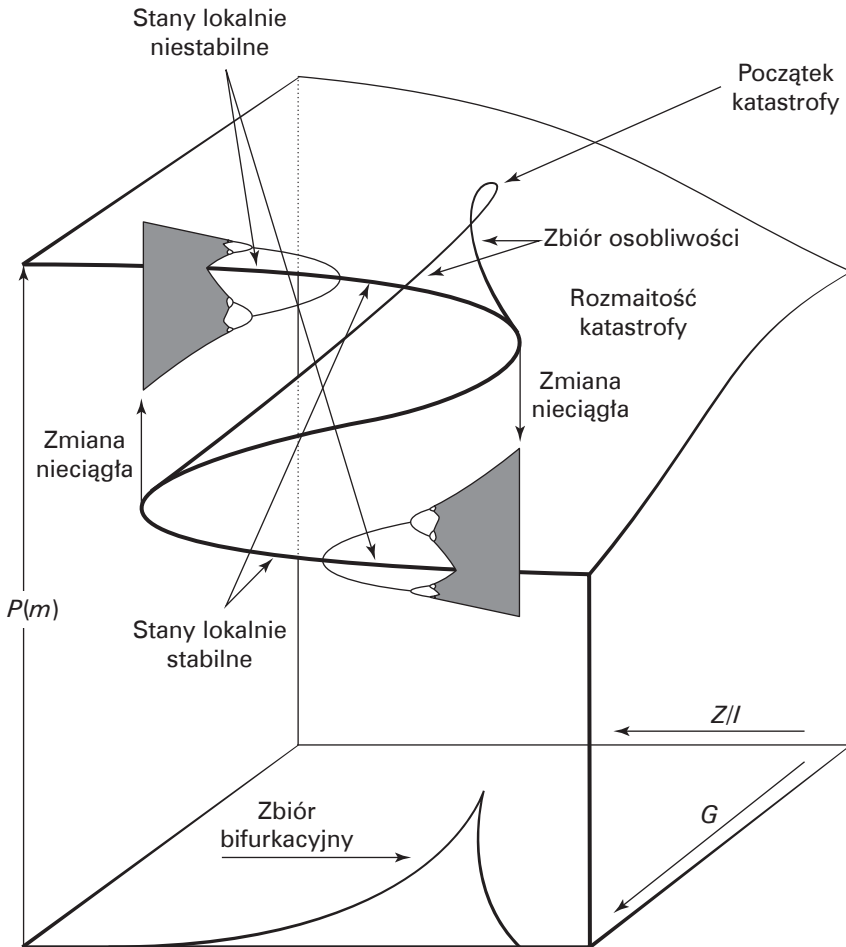
Początkowo model zakłada działanie „żelaznego prawa” gospodarki socjalistycznej: centralny planista dąży do szybszego wzrostu produkcji środków produkcji, co odbywa się kosztem niższego wzrostu środków konsumpcji. Przenoszenie konsumpcji w bliżej nieokreśloną przyszłość ma wysoką cenę w terażniejszości w postaci niedoborów i powodowanych przez nie strajków, rozruchów społecznych i innych form społecznego niezadowolenia. Władze polityczne, w celu zażegnania niebezpieczeństwa, wcześniej czy później muszą zdecydować się na przeprowadzenie reform. Polegają one na obniżeniu wartości akceleratora działającego w sferze konsumpcji, co oznacza zwiększenie inwestycji w sektorze dóbr konsumpcyjnych.

Badania numeryczne systemu dynamicznego (21)–(22) przeprowadzono, przyjmując stałą wartość akceleratora w sektorze dóbr kapitałowych $u = 2$, natomiast wartość parametru v stopniowo obniżano. Dla $0,01 \leq v \leq 0,1395$ w przestrzeni fazowej układu istnieje cykl inwestycyjny w postaci atraktora chaotycznego. Zmniejszanie wartości akceleratora sektora konsumpcji powoduje jego metamorfozę, aż wreszcie dla wartości $v = 0,00005$ przyjmuje on kształt chaotycznej histerezy. Oznacza to, że chaos istnieje wewnątrz cyklu. W trakcie tej przemiany w układzie następuje redukcja złożoności, o czym świadczy zmniejszanie się wymiaru pojemnościowego, wymiaru informacyjnego i wymiaru korelacyjnego kolejnych atraktorów (Jakimowicz, 2012a, s. 120–122). Chaos jest stopniowo eliminowany z systemu. Jednocześnie zwiększa się okres oscylacji inwestycji i ich amplituda. Powoduje to, że przed polityką gospodarczą staje trudne zadanie. Redukcja złożoności powoduje wzrost niestabilności przejawiającej się w dużej amplitudzie i długim okresie oscylacji inwestycji, natomiast zmniejszenie niestabilności prowadzi do wzrostu złożoności. Efekt ten nazwałem wymiennością między złożonością a niestabilnością. Wynika z tego, że w ekonomii znaczenia tych dwóch pojęć nie muszą koniecznie się pokrywać (Jakimowicz, 2009a).

Na rysunku 3 przedstawiono interpretację graficzną modelu transformacji systemowej, która wizualizuje i łączy jego najważniejsze komponenty: atraktor w postaci chaotycznej histerezy, katastrofę wierzchołkową i lukę technologiczną. Powierzchnia równowagi katastrofy opisuje różne scenariusze kryzysów gospodarczych i będących odpowiedzią na nie reform. Dla $G = 0$ mamy wzorcową gospodarkę rynkową. Pojawienie się luki technologicznej, co następuje po przejściu systemu przez początek katastrofy, powoduje rozcięcie powierzchni równowagi na dwie warstwy – górną i dolną. Sugerują one występowanie nieciągłych zmian prawdopodobieństwa transformacji, gdy tylko tempo wzrostu inwestycji osiągnie odpowiednią wartość. Nagłe skoki pojawiają się, gdy czynnik asymetryczny przekroczy położony w przestrzeni parametrów zbiór bifurkacyjny katastrofy wyznaczony przez zależność (7).

Należy zauważyć, że w pierwszej fazie modelowania system dynamiczny opisany równaniami (21)–(22) ma zastosowanie jedynie do gospodarki socjalistycznej, gdzie opisuje cykl inwestycyjny w postaci dziwnego atraktora. Wśród badaczy gospodarki socjalistycznej dość powszechne jest przekonanie, że w tego typu

Rysunek 3. Graficzna interpretacja modelu chaotycznej histerezy łączącego idee teorii katastrof i chaosu deterministycznego



Źródło: opracowanie własne.

objektach nie działa mnożnik inwestycyjny, zatem nie istnieje bezpośredni związek między inwestycjami (niezależnie od tego czy krajowymi, czy zagranicznymi) a wielkościami produkcji globalnej i dochodu narodowego (Osiatyński, 1988, s. 95). Związek ten jest pośredni i decyduje o nim centralny planista (Kalecki, 1984a, s. 128). Efekty mnożnikowe pojawiają się dopiero po wdrożeniu procesu transformacji (spadek parametru ν), nie one są jednak przedmiotem badań. Celem modelowania przeprowadzonego w tej części artykułu jest wskazanie na zmiany złożoności systemu gospodarczego w trakcie procesów transformacji i wynikające stąd skutki ekonomiczne.

Początkowo gospodarka centralnie planowana może osiągnąć pewien stan stabilności położony na dolnym płacie rozmaitości katastrofy. Bódźcem do zmian są rozmiary luki technologicznej. Jeśli osiągnie zbyt duże rozmiary, to nie może być przez centralnego planistę tolerowana, gdyż stanowi spore zagrożenie dla systemu. Jej zmniejszenie wymaga najczęściej wprowadzenia nowych technik, a to wymusza zwiększenie inwestycji. Po skoku na górny płat gospodarka może znaleźć się ponownie w stanie krótkookresowej stabilności. Z praktyki socjalizmu wiadomo, że w tych warunkach łatwo może nastąpić przeinwestowanie, co oznaczałoby konieczność powrotu na dolny płat. Ewentualne przejście nie odbywałoby się wzdłuż tej samej drogi, gdyż w modelu obowiązuje zasada doskonałego opóźnienia. Orzeka ona, że gdy trajektoria systemu biegnie po określonej powierzchni równowagi, to osobliwość występuje wtedy, gdy kończy się jedna warstwa tej powierzchni, a zaczyna następna. System dynamiczny utrzymuje się na każdej z warstw tak długo, jak tylko może i opuszcza ją w ostatniej chwili. Oznacza to, że gospodarka może cyklicznie przeskakiwać z jednego płatu na drugi, zakreślając pętlę zgodnie z przedstawionymi strzałkami.

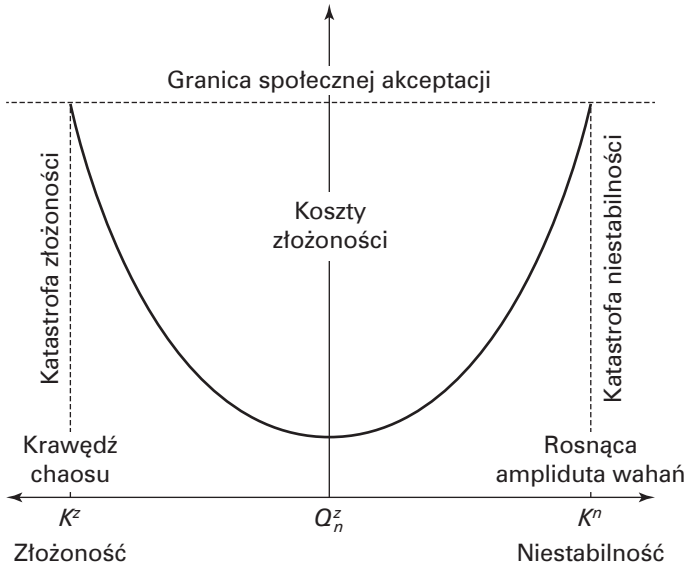
Funkcjonowanie modelu polega na tym, że w cykliczny ruch wzdłuż histerezy wpleciona jest dynamika chaotyczna. W trakcie procesu reform, oznaczającego stopniowe obniżanie stopnia centralizacji gospodarki, dziwny atraktor – reprezentujący procesy inwestycyjne – przechodzi metamorfozę, przekształcając się stopniowo w chaotyczną histerezę (Jakimowicz, 2012a). Zmiany w systemie następują zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Na każdym płacie mamy zachowania lokalnie stabilne i zachowania lokalnie niestabilne (lokalny chaos). Zachowania stabilne utrzymują się przez pewien czas, a następnie gwałtownie zanikają. Po każdym skoku pojawia się dynamika chaotyczna, system przechodzi przez część atraktora chaotycznego przypominającego ciąg bifurkacji przepołowienia okresu. Następnie ponownie mamy stabilność, ale system zajmuje już inny płat. Mimo że globalna dynamika jest chaotyczna, lokalnie jest możliwa stabilność.

Zjawisko histerezy ulega wzmocnieniu wraz z powiększaniem się luki technologicznej. Dużą rolę w tym procesie odgrywają czynniki produkcji, głównie praca, które są nośnikami pamięci systemowej. Wnoszą one elementy starego porządku do transformowanej gospodarki, zmniejszają jej elastyczność, przenoszą i utrwalają zacofanie technologiczne, stając się tym samym źródłem efektu histerezy. Kluczowe znaczenie w zrozumieniu całego procesu przemian ma praca. Jest ona nośnikiem starych nawyków i przyzwyczajzeń typu „oni udają, że płacą, a my udajemy, że pracujemy”, a także rozmaicie adresowanych roszczeniowych postaw. Tym samym model zwraca uwagę na ciekawe zjawisko, mianowicie że samo ustanowienie instytucjonalnych podstaw gospodarki rynkowej w krajach postsocjalistycznych nie gwarantuje sukcesu reform. Wynika stąd, że niezbędny okres transformacji może obejmować kilka pokoleń przedsiębiorców i konsumentów. Model zdaje się to przewidywać, gdyż samo podjęcie przekształceń wydłuża jego horyzont czasowy.

3.1.3. MAKROEKONOMICZNE KOSZTY ZŁOŻONOŚCI REFORM: TRADE-OFF MIĘDZY ZŁOŻONOŚCIĄ A NIESTABILNOŚCIĄ GOSPODARKI

Badania numeryczne modelu (21)–(22) rzucają światło na proces powstawania makroekonomicznych kosztów złożoności reform. Podstawowym problemem gospodarki socjalistycznej jest cykl inwestycyjny, który przybiera postać atraktora chaotycznego. Stopniowe obniżanie wartości akceleratora działającego w sektorze dóbr konsumpcyjnych oznacza wdrożenie i kontynuowanie procesu reform. Umożliwia to częściowe wyeliminowanie chaosu z systemu, gdyż złożoność chaotycznej histerezy – docelowego stanu gospodarki – jest mniejsza niż atraktorów występujących w fazach wcześniejszych (przed rozpoczęciem transformacji i po niej). Jednakże chaotyczna histereza jest stanem znacznie bardziej niestabilnym niż wcześniejsze chaotyczne formy. Koszty złożoności rosną zarówno z powodu wzrostu natężenia chaosu, jak i z powodu zwiększenia niestabilności. Zatem powinien istnieć jakiś stan pośredni, w którym koszty te osiągnęłyby minimum. Nie można więc mieć wszystkiego. Reformatorzy stoją przed następującą alternatywą: albo większa intensywność chaosu i mniejsza niestabilność, albo mniejsza intensywność chaosu i większa niestabilność. Do wyznaczenia przedziału dopuszczalnych scenariuszy transformacji może być wykorzystana wprowadzona przez Kornaia (1985, s. 288–295) granica społecznej akceptacji.

Na rysunku 4 pokazano trade-off między złożonością a niestabilnością. Na osi odciętych przedstawiono dwa przeciwbieżne zjawiska: katastrofę złożoności K^z i katastrofę niestabilności K^n . Na osi rzędnych zaznaczono koszty złożoności wraz z wielkością graniczną tych kosztów, wyznaczoną przez granicę społecznej akceptacji. Powyżej tego pułapu zdolności adaptacyjne gospodarki załamują się, co oznacza jej upadek. Funkcja kosztów złożoności ma standardowy kształt, a jej minimum znajduje się w punkcie Q_n^z , gdzie przeciwbieżne zmiany w procesach złożoności i niestabilności się równoważą. Gospodarka może znajdować się tylko w przedziale między wielkościami K^z i K^n . Jeśli przesuwamy się w lewą stronę, to wybieramy scenariusz transformacji o większej złożoności i mniejszej niestabilności, natomiast jeśli przesuwamy się w prawo, to wybieramy wariant o niższej złożoności i większej niestabilności. Granica społecznej akceptacji może być osiągnięta zarówno przez wzrost złożoności do wartości krytycznej K^z , jak i przez wzrost niestabilności do wartości krytycznej K^n . Obie wartości krytyczne nazwano katastrofami, gdyż oznaczają osiągnięcie granicy społecznej akceptacji, której przekroczenie wyklucza dalsze istnienie gospodarki. Tłumienie konsumpcji będzie prędzej czy później rodzić napięcia w postaci strajków i rozruchów społecznych. Proces transformacji powinien być tak zaplanowany i przeprowadzony, aby makroekonomiczne koszty złożoności reform kształtowały się w pobliżu punktu minimum Q_n^z , o ile da się to pogodzić z innymi celami ekonomicznymi.

Rysunek 4. Trade-off między złożonością a niestabilnością

Źródło: opracowanie własne.

3.2. PRAWO POSTĘPUJĄCEJ ZŁOŻONOŚCI

3.2.1. PROBLEM STABILNOŚCI RÓWNOWAGI COURNOTA-NASHA W EKONOMII GŁÓWNEGO NURTU

Model duopolu Cournota jest jednym z pierwszych modeli matematycznych wykorzystywanych w ekonomii (Cournot, 1995). Rozpatrywany jest tu przypadek dwóch przedsiębiorstw, które podejmują jednocześnie decyzje o wielkościach produkcji. Każde z przedsiębiorstw podejmuje decyzję o wielkości swojej produkcji na podstawie przewidywań, jaka będzie produkcja konkurenta. Kiedy przewidywania zostają ustalone, wytwórcy wybierają wariant produkcji maksymalizujący ich zyski. Poszukiwanym stanem jest równowaga oczekiwań, w którym każde przedsiębiorstwo znajduje potwierdzenie swoich oczekiwań odnośnie do produkcji innego wytwórcy.

W ekonomii głównego nurtu formalizuje się problem maksymalizacji zysku, co pozwala na wyznaczenie dwóch krzywych reakcji:

$$x = F_1(\bar{y}), \quad (25)$$

$$y = F_2(\bar{x}), \quad (26)$$

gdzie x i y to odpowiednio wielkości produkcji pierwszego i drugiego przedsiębiorstwa, natomiast symbole \bar{x} i \bar{y} oznaczają ich wartości oczekiwane. Tym samym funkcja reakcji opisuje optymalną decyzję o wielkości produkcji podjętą przez

dane przedsiębiorstwo jako funkcję jego oczekiwań co do decyzji produkcyjnej podjętej przez inne przedsiębiorstwo.

Punkt równowagi Cournota to taki stan rynku, w którym każdy przedsiębiorca maksymalizuje swoje zyski, przy danych oczekiwaniach odnośnie do wyboru wariantu produkcji dokonanego przez drugiego przedsiębiorcę, przy czym w tym stanie oczekiwania te zostają potwierdzone. Potwierdzenie oczekiwań oznacza, że każdy wytwórca wybiera jako optymalny taki poziom produkcji, o którym drugi wytwórca sądzi, że zostanie faktycznie wybrany. W punkcie równowagi Cournota żadne z przedsiębiorstw nie podejmie decyzji o zmianie wielkości produkcji, gdyż taka zmiana nie będzie dla niego korzystna nawet wtedy, gdy zostanie ujawniony wybór poziomu produkcji dokonany przez drugie przedsiębiorstwo.

W ekonomii głównego nurtu punkt równowagi Cournota jest wyznaczany tylko dla liniowych funkcji reakcji. Na rysunku 5 została przedstawiona sekwencja zmian na rynku dla takiego właśnie przypadku. Równowaga oczekiwań przedsiębiorców występuje w punkcie $\Omega(x_e, y_e)$, w którym przecinają się funkcje reakcji F_1 i F_2 . Załóżmy, że w pewnym okresie t przedsiębiorcy wytwarzają wielkości produkcji różne od wartości w stanie równowagi. Niech punktem startu systemu będzie punkt $A(x_t, y_t)$. Jeśli pierwszy wytwórca oczekuje, że drugi wytwórca utrzyma produkcję na poziomie y_t , to w okresie następnym pierwszy przedsiębiorca wybierze produkcję, której wielkość maksymalizowałaby zysk przy tych oczekiwaniach, a więc:

$$x_{t+1} = F_1(y_t). \quad (27)$$

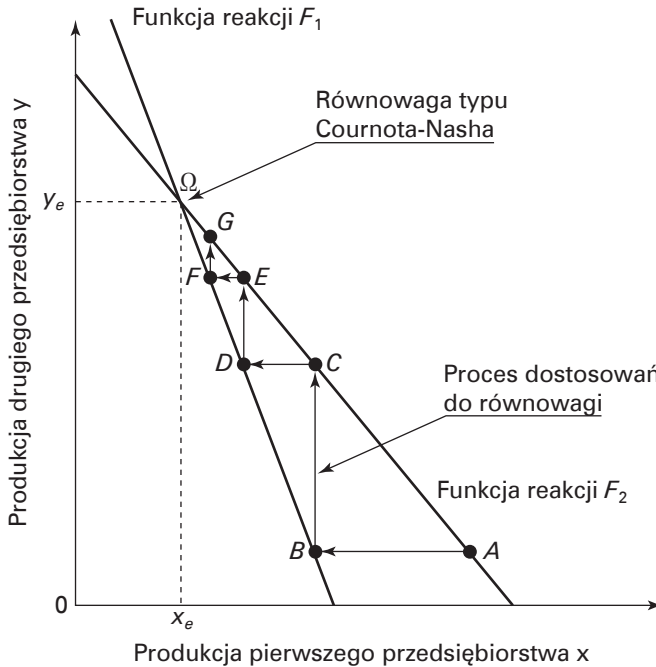
W ten sposób nastąpi przejście z punktu $A(x_t, y_t)$ do $B(x_{t+1}, y_t)$. Drugi wytwórca będzie rozumował w taki sam sposób, zatem wielkość jego produkcji w następnym okresie wyniesie:

$$y_{t+1} = F_2(x_{t+1}). \quad (28)$$

Oznacza to przejście do punktu $C(x_{t+1}, y_{t+1})$. Zatem cała sekwencja zmian rynkowych będzie opisana wektorem:

$$\begin{bmatrix} A(x_t, y_t) \\ B(x_{t+1}, y_t) \\ C(x_{t+1}, y_{t+1}) \\ D(x_{t+2}, y_{t+1}) \\ E(x_{t+2}, y_{t+2}) \\ F(x_{t+3}, y_{t+2}) \\ G(x_{t+3}, y_{t+3}) \\ \vdots \\ \Omega(x_e, y_e) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Rysunek 5. Stabilność równowagi Cournota-Nasha postulowana przez ekonomię głównego nurtu



Źródło: opracowanie własne.

Jak pokazują strzałki na rysunku 5, celem procesu dostosowawczego jest osiągnięcie stanu równowagi Cournota. Innymi słowy, ten stan równowagi jest stabilny. Wniosek ten jest podawany w każdym podręczniku mikroekonomii. Jest to prosta konsekwencja założenia o liniowości funkcji reakcji. Niektórzy autorzy wskazują nawet wprost na sprzeczność w procesie rozumowania przedstawionego na rysunku 5. Otóż każdy przedsiębiorca zakłada, że produkcja drugiego będzie z okresu na okres stała, ale ostatecznie obaj zmieniają swoją produkcję. Dlatego ekonomia głównego nurtu unika odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób osiągana jest równowaga, a skupia się jedynie na opisie zachowania producentów w punkcie równowagi (Varian, 1995, s. 476–477).

Punkt Cournota jest przykładem równowagi bez współdziałania, gdyż każdy duopolista maksymalizuje zysk tylko na podstawie oczekiwań o reakcjach konkurenta. Taki stan jest przypadkiem szczególnym ogólniejszej koncepcji równowagi, która została opracowana przez Johna Nasha (1951). Zdobyła ona znaczną popularność w teorii gier. Równowaga typu Nasha występuje, jeśli każdy z graczy wybiera optymalną strategię przy danych strategiach innych uczestników gry. Obie definicje równowagi są bardzo podobne, stąd w mikroekonomii często mówi się o równowadze typu Cournota-Nasha.

W następnej części artykułu wykazę, że uchylenie założenia o liniowości funkcji reakcji powoduje znaczne jakościowe zmiany w dynamice duopolu. W takich przypadkach najczęściej nie ma rozwiązań analitycznych, a więc takich, które można wyrazić za pomocą formuł matematycznych. Oznacza to konieczność prowadzenia badań numerycznych, które do niedawna były w ekonomii praktycznie nieznanne. Złożoność w modelach nieliniowych może gwałtownie rosnąć i wtedy w systemach takich pojawia się chaos deterministyczny. Ponadto okazuje się, że w długim okresie stany równowagi Cournota-Nasha są niestabilne (Jakimowicz, 2012b). W dalszym postępowaniu badawczym konsekwentnie utrzymany zostanie poziom ogólności rozważań wynikający z podręcznikowego ujęcia tematu.

3.2.2. PROBLEM STABILNOŚCI RÓWNOWAGI COURNOTA-NASHA W WARUNKACH NIELINIOWYCH FUNKCJI REAKCJI

Badania numeryczne standardowych nieliniowych modeli ekonomicznych ujawniają interesującą prawidłowość, którą nazwałem prawem postępującej złożoności (Jakimowicz, 2010b). Okazuje się, że w systemach ekonomicznych działają dwie siły. Pierwsza z nich ma charakter krótkookresowy, a jej źródłem są racjonalne, typowe dążenia podmiotów gospodarczych. Jednym z przejawów jej działania jest maksymalizacja wybranej funkcji celu. Można tu wymienić maksymalizację zysku przez producentów i maksymalizację użyteczności przez konsumentów. W rezultacie układy zmiernają do stanu równowagi. Druga siła działa w długim okresie i mimo że jej źródło jest identyczne jak pierwszej siły, to skutki są zupełnie inne. Destabilizuje ona krótkookresowe stany równowagi i spycha struktury rynkowe w kierunku stanu zwanego krawędzią chaosu. Jest to obszar przejściowy między zachowaniem periodycznym a zachowaniem chaotycznym, gdzie moc obliczeniowa systemów, oznaczająca ich zdolność do gromadzenia i przetwarzania informacji, osiąga maksimum. W obszarze tym rośnie złożoność układu mierzona wartością wykładników Lapunowa.

Jak wspomniano, w podręcznikach mikroekonomii dominuje twierdzenie o stabilności równowagi w strukturach rynkowych. W celu jego zweryfikowania rozważmy nieliniowy model duopolu typu Cournota-Puu (Cournot, 1995; Puu, 2000). Zakłada się, że na rynku danego dobra istnieje równowaga, podaż jest sumą produkcji dostarczanej przez dwóch wytwórców, a funkcja popytu jest izoelastyczna:

$$p = \frac{1}{x + y}, \quad (30)$$

gdzie: p – cena, x – wielkość produkcji pierwszego przedsiębiorstwa, y – wielkość produkcji drugiego przedsiębiorstwa. Ponadto przyjmuje się, że koszty krańcowe producentów są stałe (w krótkim okresie). Po oznaczeniu ich symbolami a (pierwszego) i b (drugiego) możemy wyznaczyć funkcje zysku:

$$U(x,y) = \frac{x}{x + y} - ax, \quad (31)$$

$$V(x,y) = \frac{y}{x+y} - by. \quad (32)$$

Pierwszy przedsiębiorca maksymalizuje zależność U względem zmiennej x , a drugi – zależność V względem zmiennej y . Po przyrównaniu pochodnych cząstkowych funkcji (31) i (32) do zera i wprowadzeniu datowania zmiennych system dynamiczny ma postać:

$$x_{t+1} = \sqrt{\frac{y_t}{a}} - y_t, \quad (33)$$

$$y_{t+1} = \sqrt{\frac{x_t}{b}} - x_t. \quad (34)$$

W wersji statycznej równania te wyznaczają funkcje reakcji. Każda z nich opisuje wybór wielkości produkcji dokonany przez przedsiębiorcę przy założeniu, że wielkość produkcji konkurenta jest dana. Przecięcie się tych dwóch funkcji następuje w punkcie równowagi Cournot-Nasha:

$$x_e = \frac{b}{(a+b)^2}, \quad (35)$$

$$y_e = \frac{a}{(a+b)^2}. \quad (36)$$

Zyski duopolistów w punktach równowagi oblicza się, podstawiając zależności (35)–(36) do (31)–(32):

$$U(x,y) = \frac{b^2}{(a+b)^2}, \quad (37)$$

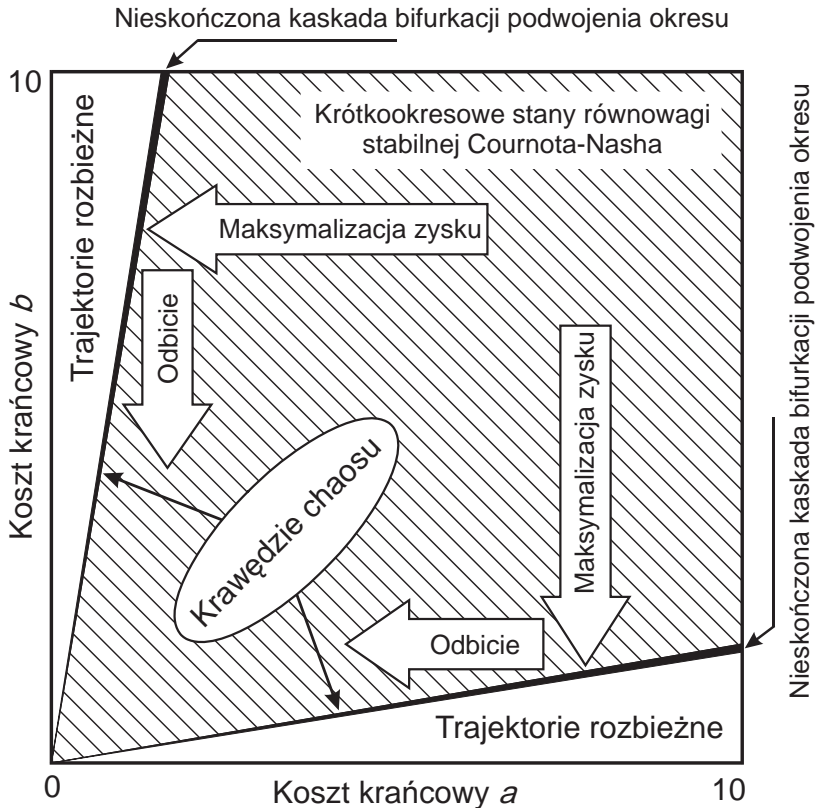
$$V(x,y) = \frac{a^2}{(a+b)^2}. \quad (38)$$

Standardowa analiza stabilności modelu pozwala na wyznaczenie dwóch wartości krytycznych stosunku kosztów marginalnych:

$$\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} = 3 \pm 2\sqrt{2}. \quad (39)$$

Na tym możliwości metod analitycznych się kończą. Nie wiemy ani tego, co dzieje się z modelem, gdy próg stabilności zostanie przekroczony, ani tego, jak zachowuje się on w długim okresie.

Badania numeryczne duopolu (33)–(34) najlepiej rozpocząć od sporządzenia wykresu okresu (Nusse, Yorke, 1998). Jest to dwuwymiarowa przestrzeń parametrów, w której określono różne zachowania systemu (z położeniem nacisku na zachowania periodyczne). W tym celu definiuje się przedziały zmienności obu parametrów i warunek początkowy wiązki trajektorii. Tego typu wykres pozwala śledzić dynamikę układu w zależności od jednoczesnej zmiany dwóch parametrów kontrolnych.

Rysunek 6. Dynamika duopolu typu Cournota-Puu w przestrzeni parametrów

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 6 przedstawiono dynamikę duopolu w przestrzeni parametrów. Obszar zakresowany definiuje punkty równowagi stabilnej w krótkim okresie, które są wyznaczone przez punkty przecięcia się krzywych reakcji (Nash, 1951). Obszar stabilności ograniczony jest przez dwie półproste (39). Wyznaczają one w przestrzeni parametrów początek dwóch krawędzi chaosu. Przekroczenie tych półprostych powoduje utratę stabilności przez duopol. Obszary białe są odpowiedzialne za rozbieżne trajektorie. Dla tych wartości kosztów krańcowych model traci spójność. Między obszarami stabilności a rozbieżności położone są dwie krawędzie chaosu, które zaznaczono kolorem czarnym, a w każdej z nich istnieje nieskończony ciąg bifurkacji podwojenia okresu prowadzący do chaosu. Pary parametrów odpowiadające za stany równowagi stanowią 82,77% przestrzeni parametrów, natomiast pary parametrów chaotycznych tylko 0,15% tej przestrzeni. Wydaje się więc, że stabilność dominuje i twierdzenia konwencjonalnej ekonomii zostały potwierdzone. Jest to jednak fałszywy wniosek.

Przedsiębiorcy są zainteresowani maksymalizacją zysku nie tylko w krótkim okresie, lecz także w długim okresie. Maksymalizowanie zysku w długim okresie wymaga wprowadzenia postępu techniczno-organizacyjnego, a jego objawem jest zmniejszanie się kosztu krańcowego. Na wykresie okresu oznacza to przesuwanie się każdego z przedsiębiorców w kierunku jednej z krawędzi chaosu, a więc stanów o rosnącej złożoności. Pierwszy producent będzie dążył do krawędzi

$$b = (3 + 2\sqrt{2})a, \quad (40)$$

natomiast drugi do krawędzi

$$b = (3 - 2\sqrt{2})a. \quad (41)$$

co zaznaczono białymi szerokimi strzałkami. Wypadkowa duopolu będzie na pewno bardziej skomplikowana, jeśli założymy, że układ sił na rynku będzie się zmieniał w taki sposób, że każdy z producentów będzie miał szansę przez pewien czas utrzymać przewagę nad konkurentem. Jednak dynamika wypadkowa będzie zawsze składała się z tych dwóch ruchów podstawowych.

Badany system dynamiczny przejawia pewien rodzaj globalnej stabilności (Matsumoto, 2006). Jego zachowanie jest inteligentne w tym sensie, że dąży on do przetrwania w długim okresie. Upodabnia to badany system do żywego organizmu. Niech przedsiębiorstwa różnią się kosztami krańcowymi, co jest równoznaczne z osiągnięciem przez nie różnych zysków. Nazwijmy wytwórcą efektywnym producenta mającego większy zysk, a wytwórcą nieefektywnym jego konkurenta. Z chwilą, gdy wytwórcą efektywny osiąga krawędź chaosu, jego długookresowy zysk maleje, natomiast rośnie długookresowy zysk nieefektywnego przedsiębiorstwa. W rezultacie następuje zamiana ról, co na wykresie okresu oznacza odbicie się rynku od krawędzi chaosu. System wydaje się przejawiać pewien rodzaj globalnej racjonalności pozwalającej mu na przetrwanie. Interesujące zmiany następują w skutkach stosowania przez oba podmioty gospodarcze tradycyjnego rozumienia racjonalności. Najwyraźniej dążenie do maksymalizacji zysku nie zapewnia powodzenia w każdej sytuacji. Problem ten wymaga dalszych, pogłębionych badań.

PODSUMOWANIE

Teoria katastrof i chaos deterministyczny są coraz powszechniej stosowane w badaniach ekonomicznych. Paradoksalnie, wpływ na to miały kryzysy gospodarcze ostatnich lat, których konwencjonalna, liniowa teoria ekonomii nie potrafiła wyjaśnić. W zasadzie wszystkie układy dynamiczne są nieliniowe. Warunek liniowości implikuje bowiem, że żadna ze zmiennych układu nie podlega jakimkolwiek ograniczeniom. W pewnych warunkach możliwa jest linearyzacja niektórych zagadnień, ale nie zawsze ma to sens. W ekonomii dążenie do stworzenia zasobu pewnej i sprawdzonej wiedzy odbywało się kosztem dokonywania znacznych uproszczeń, co doprowadziło do zerwania związków teorii z praktyką. Pominęto kwestię naturalnej złożoności procesów gospodarczych, które należą do

najbardziej złożonych systemów dynamicznych badanych w nauce. Możliwości metod nieliniowych wskazują na dwa ważne kierunki rozwoju ekonomii. Pierwszy polega na testowaniu odpowiedniości i spójności logicznej już istniejących modeli. Niektóre z nich, po pomyślnym przejściu procedur sprawdzających, mogłyby wejść do tzw. twardego rdzenia. Drugi polega na poszerzaniu zasobu istniejącej wiedzy. W ten sposób oba przyczyniają się do rozwoju nauki.

Kryzys ekonomii jako nauki każe też przyjrzeć się bliżej szeroko stosowanym procedurom redukcjonistycznym. Uproszczenie rzeczywistości przez rozkładanie całości na elementy składowe może spowodować zagubienie wartości emergentnych. Zjawisko to, zwane często antychaosem, polega na tym, że złożoność może czasami przechodzić w prostotę (Kauffman, 1991; Shermer, 1995). Zasada zachowania złożoności przy przechodzeniu od przyczyn do skutków obowiązuje tylko w świecie liniowym, natomiast w realnym świecie złożoność może na przemian powstawać i zanikać. Jesteśmy przyzwyczajeni do tego, że proste zjawisko jest wynikiem prostych reguł, a złożone zjawisko jest wynikiem złożonych reguł. Nie zawsze tak jednak jest. Przykładem błędnego z punktu widzenia teorii złożoności programu badawczego jest poszukiwanie mikroekonomicznych podstaw makroekonomii, co usiłuje dokonać nowa ekonomia keynesistowska (Wojtyła, 2000). Nurt ten ma niewiele wspólnego z oryginalną myślą Keynesa, który dostrzegał złożoność procesów gospodarczych i postulował makroekonomię jako własność emergentną systemów z poziomu mikroekonomicznego (Jakimowicz, 2009b). Już Arystoteles zauważył, że całość nie musi być sprowadzalna do sumy elementów składowych.

BIBLIOGRAFIA

- Beinhocker E.D. (2006), *Origin of Wealth: Evolution, Complexity, and the Radical Remaking of Economics*, Harvard Business School Press, Boston.
- Bogle J.C. (2009), *Dość. Prawdziwe miary bogactwa, biznesu i życia*, PTE, Warszawa.
- Booker C. (2010), *The Seven Basic Plots: Why We Tell Stories*, Continuum, New York.
- Chen P. (1993), *China's challenge to economic orthodoxy: Asian reform as an evolutionary, self-organizing process*, "China Economic Review", Vol. 4, No. 2, s. 137–142.
- Cournot A. (1995), *Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, James & Gordon, San Diego.
- Hawking S. (2002), *Wszechświat w skorupce orzecha*, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań.
- Hicks J.R. (1951), *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Clarendon Press, Oxford.
- Hommes C.H. (2005), *Economic System Dynamics*, in: *Encyclopedia of Nonlinear Science*, A.C. Scott (red.), Routledge, New York, s. 245–248.
- Hommes C.H. (2006), *Heterogeneous agent models in economics and finance*, w: *Handbook of Computational Economics*, Vol. 2: *Agent-Based Computational Economics*, L. Tesfatsion, K.L. Judd (red.), North-Holland, Amsterdam, s. 1109–1186.
- Jakimowicz A. (2005), *Od Keynesa do teorii chaosu. Ewolucja teorii wahań koniunkturalnych*, Seria: „Współczesna Ekonomia”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

- Jakimowicz A. (2009a), *Interdisciplinary matrix in economics: Two applications to the transition from socialism to capitalism*, "Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences", Vol. 13, No. 4, s. 393–421.
- Jakimowicz A. (2009b), *O niektórych implikacjach nieliniowości w keynesizmie*, „*Ekonomista*”, nr 1, s. 15–48.
- Jakimowicz A. (2010a), *Catastrophes and Chaos in Business Cycle Theory*, "Acta Physica Polonica A", Vol. 117, No. 4, s. 640–646.
- Jakimowicz A. (2010b), *Źródła niestabilności struktur rynkowych*, Seria: „Współczesna Ekonomia”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Jakimowicz A. (2012a), *Podstawy interwencjonizmu państwowego. Historiozofia ekonomii*, Seria: „Współczesna Ekonomia”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Jakimowicz A. (2012b), *Stability of the Cournot-Nash equilibrium in standard oligopoly*, "Acta Physica Polonica A", Vol. 121, No. 2-B, s. B-50–B-53.
- Kalecki M. (1984a), *Teorie wzrostu w różnych systemach społecznych*, w: M. Kalecki, *Dzieła*, t. 4: *Socjalizm. Wzrost gospodarczy i efektywność inwestycji*, PWE, Warszawa, s. 125–132.
- Kalecki M. (1984b), *Zarys teorii wzrostu gospodarki socjalistycznej*, w: M. Kalecki, *Dzieła*, t. 4: *Socjalizm. Wzrost gospodarczy i efektywność inwestycji*, PWE, Warszawa, s. 17–124.
- Kauffman S.A. (1991), *Antichaos and adaptation*, "Scientific American", Vol. 265, No. 2, s. 78–84.
- Keynes J. M. (1985), *Ogólna teoria zatrudnienia, procentu i pieniądza*, PWN, Warszawa.
- Kornai J. (1985), *Niedobór w gospodarce*, PWE, Warszawa.
- Lange O. (1975), *Prawa ekonomiczne*, w: O. Lange, *Dzieła*, t. 3: *Ekonomia polityczna*, PWE, Warszawa, s. 260–304.
- Lorenz E.N. (1963), *Deterministic nonperiodic flow*, "The Journal of the Atmospheric Sciences", Vol. 20, No. 2, s. 130–141.
- Lorenz E.N. (1995), *The Essence of Chaos*, UCL Press, London.
- Matsumoto A. (2006), *Controlling the Cournot-Nash chaos*, "Journal of Optimization Theory and Applications", Vol. 128, No. 2, s. 379–392.
- Nash J. (1951), *Non-cooperative games*, "Annals of Mathematics", Vol. 54, No. 2, s. 286–295.
- Noga A. (2009), *Teorie przedsiębiorstw*, PWE, Warszawa.
- Nusse H.E., Yorke J.A. (1998), *Dynamika. Badania numeryczne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Oseledec V.I. (1968), *Multiplikatiwnaja ergodiczeskaja teorema. Charakteristiczeskije pokazateli Lapunowa dinamiczeskich sistem*, „Trudy Moskovskogo Matematycznego Obszczestwa”, t. 19, s. 179–210.
- Osiatyński J. (1988), *Michał Kalecki o gospodarce socjalistycznej*, PWN, Warszawa.
- Poincaré H. (1952), *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, w: *Oeuvres de Henri Poincaré*, t. VII: *Masses fluides en rotation. Principes de mécanique analytique. Problème des trois corps*, Gauthier-Villars, Paris, s. 262–479.
- Poston T., Stewart I. (1996), *Catastrophe Theory and its Applications*, Courier Dover Publications, Mineola, New York.
- Puu T. (1992), *Order and disorder in business cycles*, "Annals of Operations Research", Vol. 37, No. 1–4, s. 169–183.

- Puu T. (2000), *Attractors, Bifurcations, and Chaos. Nonlinear Phenomena in Economics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Rosser J.B., Jr. (1992), *From Catastrophe to Chaos: A General Theory of Economic Discontinuities*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Rosser J.B., Jr., Rosser M.V. (1998), *Discrete dynamics in transitional economies*, "Discrete Dynamics in Nature and Society", Vol. 1, No. 4, s. 269–281.
- Rosser J.B., Jr., Rosser M.V., Guastello S.J., Bond R.W. (2001), *Chaotic hysteresis and systemic economic transformation: Soviet investment patterns*, "Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences", Vol. 5, No. 4, s. 345–368.
- Sargent T.J. (1993), *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Clarendon Press, Oxford.
- Shermer M. (1995), *Exorcising Laplace's demon: Chaos and antichaos, History and metahistory*, "History and Theory", Vol. 34, No. 1, s. 59–83.
- Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences*, P.J. Hilton (red.), Springer-Verlag, Berlin 1976.
- Thom R. (1975), *Structural Stability and Morphogenesis. An Outline of a General Theory of Models*, Benjamin, London.
- Trotman D., Zeeman E.C. (1988), *Klasyfikacja elementarnych katastrof kowymiaru ≤ 5* , w: *Zbiory rozmyte. Rozpoznawanie obrazów. Teoria katastrof. Wybór tekstów*, M. Cieślak, A. Smoluk (red.), PWN, Warszawa, s. 123–194.
- Varian H.R. (1995), *Mikroekonomia. Kurs średni. Ujęcie nowoczesne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Whitney H. (1943), *The general type of singularity of a set of $(2n - 1)$ smooth functions of n variables*, „Duke Mathematical Journal”, Vol. 10, No 1, s. 161–172.
- Whitney H. (1944), *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ space*, „Annals of Mathematics”, Vol. 45, No. 2, s. 247–293.
- Whitney H. (1955), *On singularities of mappings of Euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane*, „Annals of Mathematics”, Vol. 62, No. 3, s. 374–410.
- Wojtyna A. (2000), *Ewolucja keynesizmu a główny nurt ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Zeeman E.C. (1974), *On the unstable behaviour of stock exchanges*, "The Journal of Mathematical Economics", Vol. 1, No. 1, s. 39–49.
- Zeeman E.C. (1975), *Applications of catastrophe theory*, w: *Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology*, A. Hattori (red.), University of Tokyo Press, Tokyo, s. 11–23.
- Zeeman E.C. (1977), *Catastrophe Theory: Selected Papers, 1972–1977*, Addison-Wesley, London.

STRESZCZENIE

Celem artykułu jest wykazanie, że zastosowanie metod dynamiki nieliniowej w badaniach nieliniowych matematycznych modeli rynków i gospodarek zwiększa zdolności poznawcze ekonomii. Pozwala ono na zidentyfikowanie w systemach ekonomicznych nowych stanów, takich jak chaotyczna histereza czy krawędź chaosu, które mają, jak się wydaje, znacznie większe odniesienia do rzeczywistości niż tradycyjne, stabilne stany równowagi. Ten nowy nurt badań jest nazywany

ekonomią złożoności. Do dwóch najważniejszych metod nieliniowych stosowanych w ekonomii należą teoria katastrof i chaos deterministyczny.

Katastrofa oznacza nagle przejście badanego systemu do nowego stanu. Podkreślenia wymaga szybkość zmian w zachowaniu obiektu w porównaniu do średniej zmiany w przeszłości. Teoria katastrof łączy dwa pozornie sprzeczne i niezwiązane ze sobą sposoby opisu zjawisk w jeden spójny system pojęciowy: ewolucjonizm i rewolucjonizm, ciągłość i nieciągłość. Zastosowania teorii katastrof w ekonomii mają duże znaczenie poznawcze. To one zapoczątkowały ekonomię złożoności. Chaos deterministyczny jest podstawową formą złożoności spotykaną w nauce. Ten rodzaj zachowania, zwany efektem motyla, oznacza wrażliwość systemów dynamicznych na warunki początkowe.

W artykule podano dwa wzorcowe przykłady zastosowania dynamiki nieliniowej w ekonomii: model chaotycznej histerezy i model duopolu typu Cournot-Puu. W pierwszym z nich zauważono wymiennosc między złożonością a niestabilnością, natomiast drugi przyczynił się do sformułowania prawa postępującej złożoności.

Teoria chaosu deterministycznego i nauka o złożoności stawiają zagadnienia wyjaśniania i przewidywania w ekonomii w sposób zupełnie odmienny od tego, jaki proponuje ekonomia konwencjonalna. Naturalnym stanem systemów gospodarczych nie jest stan równowagi, ale pewien stan nierównowagowy zwany krawędzią chaosu, który osiągany jest przez rynki i gospodarki w długim okresie. Po osiągnięciu krawędzi chaosu okazuje się, czy dany układ może być uznany za złożony system adaptacyjny. Posiadanie własności emergentnych jest warunkiem jego przetrwania.

Słowa kluczowe: krawędź chaosu, model chaotycznej histerezy, wymiennosc między złożonością a niestabilnością, duopol, prawo postępującej złożoności.

CATASTROPHES AND CHAOS IN EXPLAINING THE COMPLEXITY OF ECONOMIC PROCESSES

ABSTRACT

The aim of this article is to show that the application of nonlinear dynamics methods in explorations of nonlinear mathematical models of markets and economies increases cognitive capabilities of economics. It enables us to identify new states in economic systems, such as chaotic hysteresis or the edge of chaos, which seem to have much broader implications for reality than traditional, stable equilibrium states. The new trend of explorations is called complexity economics. The two most important nonlinear methods applied in economics include the catastrophe theory and the deterministic chaos.

A catastrophe means a sudden transition of an explored system to a new state. What needs to be underlined is the speed of changes in the object's behavior in

comparison with the mean change in the past. The catastrophe theory brings together seemingly incongruent ways of phenomena analysis into one integrated notion system: evolutionism and revolutionism, continuity and discontinuity. Applications of catastrophe theory in economics are of large cognitive significance. It is them that initiated the complexity economics. Deterministic chaos is a fundamental form of complexity present in science. This type of behavior, also known as the butterfly effect, concerns the sensitivity of dynamic systems to initial conditions.

The article features two model examples of nonlinear dynamics application in economics: the chaotic hysteresis model and the Cournot-Puu duopoly model. What was noticed in the first one was the trade-off between complexity and instability, whereas the later triggered the formation of the law of progressing complexity.

The theory of deterministic chaos and the science of complexity present the questions of explanation and foreseeing in economics in a way that is utterly different from the one proposed by conventional economics. A natural state of economic systems is not an equilibrium, but a certain non-equilibrium state known as the edge of chaos, which is reached by markets and economies in the long run. After reaching the edge of chaos it turns out whether a given system can be deemed a complex adaptive system. One condition for its survival is to have emergent properties.

Keywords: edge of chaos, chaotic hysteresis model, trade-off between complexity and instability, duopoly, law of progressing complexity.

JEL Classification: A12, B41, C62, D43, E61, L13, P21, Z13.